量子ホール効果とトポロジカル不変量(素粒子論と物性論におけるトポロジーに関連する諸現象,研究会報告)

青木, 秀夫; 安藤, 恒也

結論として monopole に fermion 数のみならず electric charge が induce される現象は，chiral anomaly，θ-vacuum structure, Higgs 場のトポロジーの密接な interplay によってひき起される興味深い現象である。

文　献

1) R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. **D13** (1976) 3396.
2) W. P. Su, J. R. Schrieffer and A. J. Heeger, Phys. Rev. **B22** (1980) 2099.
3) 日本物理学会誌 **39** (1984) №12，モノポール特集.
4) E. Witten, Phys. Lett. **86B** (1979) 283.
5) C. G. Callan, Phys. Rev. **D26** (1982) 2058.
6) J. A. Harvey, Phys. Lett. **131B** (1983) 104.
7) Y. Hirata and H. Minakata, Phys. Rev. **D34** (1986) 2519.
8) H. Minakata, Phys. Lett. **155B** (1985) 352.
9) H. Minakata, Phys. Rev. **D32** (1985) 2134.
10) A. S. Goldhaber, Phys. Rev. **D12** (1986) 3697.
11) P. Sikivie, Phys. Lett. **137B** (1984) 353.

量子ホール効果とトポロジカル不変量

東大・理　青 木 秀 夫

物 性 研　安 藤 恒 也

固体物理において特異な輸送現象の量子化である量子ホール効果に対し，(a)久保公式によるホール伝導度が，磁場中で複素である波動関数の性質を特徴づけるトポロジカル不変量で与えられ，厳密な量子化が証明されること，(b)このトポロジカル不変量の解析から自然に，試料サイズや局在の程度等に依存する，物理的に観測されるホール伝導度の振舞いが与えられることを示す。

1. 量子ホール効果

量子ホール効果[1]は，磁場 (H) 中の２次元系のホール伝導度 (σ_{xy}) が，電子の面密度の関数として，一つのランダウ準位を満たす毎にステップとなるプラトーになり，その値が

$$\sigma_{xy} = -Ne^2/h \qquad (N = \text{整数}) \tag{1}$$

に量子化される現象である。従来分かっていたのは，(a)プラトーにおいて σ_{xy} が平坦になるのは状態の局

在のためである,[2] (b) H が大きい極限では(1)式は証明される,[2] (c) H が有限でも，ゲージ不変性から（ある近似の下で）(1)が言えること[3]である。従ってここで求められるのは，量子ホール効果はどんな条件下で厳密に成り立つのか，その証明の次には実際に観測される σ_{xy}（E_F の連続関数で，局在の程度などの系の性質に依存する）との関係はどうか，という問題に対する描像である。以下ではこの二点を明かにする。

§2. 量子ホール効果の厳密な証明 ― トポロジカル不変量

この節では，久保公式によるホール伝導度（の flux 平均）が，系の外部磁束（flux）依存性を特徴づけるトポロジカル不変量（整数：関与する写像のホモトピー・クラスの指標である Pontrjagin 数）に厳密に等しいことを示す。このアプローチの特長は，任意の大きさの磁場に対し，(1)証明が系のトポロジカルな性質だけに係わり，広い範囲の系（2次元/3次元，規則/不規則，連続/格子，etc.）をカバーした証明になっており，多体系にも拡張される。(2)トポロジカル不変量のとる値とその分布を解析することにより，実際観測される σ_{xy} との関係，特に状態局在や試料サイズへの依存性（スケーリング）を導く自然な道を与えている，という二点である。

量子ホール伝導度が，系の波動関数の性質に関したホモトピー・クラスで与えられることは，Thouless 等[4] により最初に調べられた周期系に対して，Avron 等[5]や Simon [6]により指摘された。 Niu, Thouless, Wu [7]は，一般の系でエネルギー・スペクトルにギャップがある時は σ_{xy} が量子化されることを示した。Aoki, Ando [8]は，一般にギャップの有無に関わらず以下のことを示した。

先ず geometry は Laughlin [3]により用いられたもの（系を輪にして，中に磁束 $\boldsymbol{\Phi}$ を通す）を考える。系は磁束による余分なベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を感じ，有限系では σ_{xy} は実際 $\boldsymbol{\Phi}$ に依存する（AB効果）ことが示される。[9] 磁束への完全な依存性は，2成分 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_x, \boldsymbol{A}_y)=(\boldsymbol{\Phi}_x/L, \boldsymbol{\Phi}_y/L)$ の2重周期関数で与えられるが，久保公式から，σ_{xy} の $\boldsymbol{A}$ についての平均，$<\sigma_{xy}>$，は

$$\frac{<\sigma_{xy}>}{e^2/h}=\frac{1}{8\pi^2}\int_C dz \iint_0^{\phi_0/L} dA_x\, dA_y\, \mathrm{Tr}\left[G\frac{\partial G^{-1}}{\partial A_x}\,G\frac{\partial G^{-1}}{\partial A_y}\,G\frac{\partial G^{-1}}{\partial z}-(x\leftrightarrow y)\right] \tag{2}$$

で与えられる。[8] ここで $G=(\mathscr{H}-z)^{-1}$ はグリーン関数，$\phi_0=eh/c$ は磁束量子。これは丁度 $\boldsymbol{A}$ から系の状態への写像の Pontrjagin 数を与える整数となっている。さらに，エネルギー z について積分し，系の正規直交波動関数 u を用いると，任意の系に対し電子数を固定したとき

$$\frac{<\sigma_{xy}>}{e^2/h}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\alpha}^{\mathrm{occ}}\iint\left[\left\langle\frac{\partial u^\alpha}{\partial A_x}\middle|\frac{\partial u^\alpha}{\partial A_y}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial u^\alpha}{\partial A_y}\middle|\frac{\partial u^\alpha}{\partial A_x}\right\rangle\right]dA_x\,dA_y \tag{3}$$

となる。[8] この量は再び整数（first Chern class）で与えられる。[6-8] ちなみに，4次元時空のゲージ場でのオイラー指数（second Chern class）は topological charge という不変量である。[10, 11] 量子ホール効果の場合，物理的には，$\boldsymbol{A}$ を変化（境界条件を twist）させたときに波動関数（複素ヒルベルト空間のベクトル）が掃く超曲面のトポロジーの指標が σ_{xy} となっている。換言すると，$\partial/\partial A_x$ と $\partial/\partial A_y$ は演算子として非可換で，この超曲面が non-trivial なトポロジーを持ちえ，そのとき σ_{xy} が nonzeroになる。

この証明から，3次元系でもホール・コンダクタンスが量子化されることがいえる。[12] さらに，多体系では，多体波動関数が M 重に縮退しているときは $\sigma_{xy}/(e^2/h)=$ 整数$/M$ となることが示せる。Laughlin の描

像[13]では，分数量子ホール系の波動関数は，ランダウ準位占有率が p/q という有理数のときは p 重に縮退[14]しているので，このとき σ_{xy} は整数$/p$に量子化される。

§3. 量子ホール効果 — 観測量

上の証明から，無限系では E_F における状態が局在しているとき σ_{xy} は厳密に量子化されることがいえる。一方，有限系では flux 平均された σ_{xy} が量子化されることから，観測される（flux 平均しない）ホール伝導度の振舞いが予言される。即ち，磁場中の有限格子系（不規則性をもつ）に対する数値計算により，次のことが確かめられる：[8]

(1) (3)式で与えられる flux 平均された σ_{xy}（整数）は状態毎に異なり，個々の値は不規則ポテンシャルを変えると変化する。しかし，その値の確率分布は，不規則性の程度 (W) や試料サイズを指定すれば一意に定まっていて，集団平均された σ_{xy} はW等の値に応じてエネルギーの well-behaved な関数になっている。

(2) Flux 平均 σ_{xy} と，固定された$\boldsymbol{A}$に対する σ_{xy} の値は一般にはずれるが，試料サイズを大きくするに従い一致する。試料サイズ依存性は下記のようなスケーリングで記述される。

局在問題は，磁場の無い場合は，スケーリング理論[15]で理解されると思われている。しかし，ユニバーサリティ・クラスが異なる磁場中２次元系の局在は，その特異性から未だに中心的な面白い問題である。この系では単一パラメター・スケーリングは崩れることが分かっている[16]ので，次の疑問は，σ_{xx}（電場方向の伝導度）と σ_{xy} が二つの関与するパラメターとなっているか否かである。実際，サイズを変えた系で数値計算をすると，σ_{xx} と σ_{xy} は独立なパラメターではなく（つまり，非線形 σ モデルの結果[17]は正しくなく），$\sigma_{xx}-\sigma_{xy}$ 平面で一定の軌跡に乗る。[18]但し，軌跡の形自身はランダウ準位の混ざり方等の系の性質に依る。上で議論した格子系での σ_{xy} もこのような振舞いをすることが数値実験により示される。[19]

このように，量子ホール効果と局在/スケーリングは興味深い問題をなしている。その詳細は将来の課題であろう。

参考文献

1) K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 494.
2) H. Aoki and T. Ando, Solid State Commun. **38** (1981) 1079.
3) R. B. Laughlin, Phys. Rev. **B23** (1981) 5632.
4) D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 405.
5) J. Avron, R. Seiler and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 51.
6) B. Simon, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2167.
7) Q. Niu, D. J. Thouless and Y. S. Wu, Phys. Rev. **B31** (1985) 3372.
8) H. Aoki and T. Ando, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 3093.
9) H. Aoki, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1136.

10) R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 172.

11) A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Y. S. Tyupkin, Phys. Lett. **59B** (1975) 85.

12) H. L. Störmer, J. P. Eisenstein, A. C. Gossard, W. Wiegmann and K. Baldwin, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 85 は超格子（3次元系）における量子ホール効果の観測を報告している.

13) R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1395.

14) D. Yoshioka, Phys. Rev. **B29** (1984) 6833.

15) E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 673.

16) H. Aoki and T. Ando, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 831.

17) A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. **B32** (1985) 2636.

18) T. Ando, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 3199.

19) H. Aoki and T. Ando, *Proc. Int. Conf. on Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics,* Würzburg 1986, to be published.

3次元ＱＥＤにおけるトポロジー

北大・理　松 山 豊 樹*)

奇数次元時空間上の場の量子論は，時空間の次元数が奇数であるという正にそのことによって，通常の偶数次元時空間上の場の量子論にはなかった新しい理論構造を持ち得る。これは，数学的には，Chern-Simonsの第2特性類と呼ばれる位相的な意味を持つ項，

$$I_{CS}=\mu\int_M tr\left(FA-\frac{1}{3}A^3\right),$$

が（有効）作用の中にゲージ不変性に抵触せずに許されることに依る。ここでAは接続1−形式，Fは曲率2−形式，Mは3次元時空間，μは位相質量を表わす。特に量子電磁力学においては，この項に起源を持つ非自明な位相構造が実際の物理現象として自然界に発現していると考えられる場合がある。こういった理論・実験の両面から，3次元量子電磁力学の位相構造を研究することは非常に意義深いことと思われる。

非可換ゲージ群Gを持つ$M=S^3$上の理論の場合，ゲージ不変性の要請により，もしも$\pi_3(G)\neq 0$ならば位相質量の量子化が起こる。一方，アーベル群$U(1)$を持つ量子電磁力学の場合には$\pi_3(U(1))=0$で

*) 昭和62年4月より京都大学基礎物理学研究所